

<研究抄録>

組み合わせ理論における一問題

——部分ラテン方格の拡張可能性について——

電力中央研究所報告 No. 577002

大 山 達 雄

ラテン方格は、 $n \times n$ の正方行列において n^2 コのそれぞれの細胞 (cell) が $\{1, 2, \dots, n\}$ の中の 1 コの記号 (symbol) を含み、かつそれぞれの記号がそれぞれの行および列に一度ずつ現われるようなものである。それに対して部分ラテン方格とは、いくつかの細胞が記号を含んでいないようなラテン方格である。この論文では部分ラテン方格がラテン方格に拡張できるための必要十分条件を得る問題を考慮する。この問題はネットワーク理論の多品種フロー問題、グラフ彩色問題、時間割問題などとも密接な関係を有するものである。

一般的な形の問題に関しては、最近 A. B. Cruse が 3 次元確率行列に基づく必要条件を提案した。この論文では 2 種類の必要条件、1 つはネットワークフロー理論に基づき、他の 1 つはマトロイド理論から得られる、を考慮する。これらの必要条件の相互関係を示すものとして、ネットワーク条件が Cruse の条件と等価であること、またマトロイド条件が前のいずれよりも厳密な意味で強いことが証明されている。これらの条件が部分ラテン方格の拡張のための必要条件であって十分条件でないことは例によって示されるが、ネットワーク条件が必要十分条件となりうる場合もある。1951 年に

Ryser によって得られた必要十分条件を導出するラテン小長方格の場合、部分ラテン方格において記号を割り当てられていない細胞の集合が正方行列の下右の角の長方形である場合の特殊なケースなどがネットワーク条件が必要十分条件となるうちの代表的なものであるが、これら以外の場合も含めて考慮され、結果が証明されている。

さらにもうひとつの必要条件として、3 次元確率行列の特性に基づいたものを考慮する。この条件がマトロイド条件を導出することは証明されるが、この逆に関して、つまり 3 次元確率行列による条件がマトロイド条件を導出するかどうかということに関しては最終的な解答は得られておらず、この問題に対するひとつのアプローチはこの論文の中に与えられている。マトロイド条件を満足しないということ、つまりマトロイド条件が、与えられた部分ラテン方格がラテン方格に拡張不可能であることを示しうるということの特性記述を、部分ラテン方格に対応づけて得られるネットワーク上の線形計画法問題を用いて表わすことが試みられている。

最後にこの部分ラテン方格のラテン方格への拡張問題について、その計算上の複雑度を考える。厳密な意味での部分ラテン方格の拡張問題

が NP-完全であるかどうかに関してはまだ知られていないが、これに関連したある種の部分ラテン方格の拡張問題が NP-完全であることはこの論文の中で証明されている。

なおこの論文の中心になっている部分ラテン方格の拡張問題は、次のような問題とも密接な関係（あるいは等価な関係）を有し、それぞれの分野への応用可能性をも有するものである。

(1) いくつかの地点と、各地点でのいくつかの異なる物質の供給および需要量、さらにそれらの地点を結ぶ経路およびその輸送容量が与えられた時、これらに関する条件を満足するようなフローが存在するかどうかを論ずる問題

(2) いくつかの異なる仕事と異なる機械との集合が与えられた場合、機械を仕事に割り当てることによって最短時間ですべての仕事を終了できるようなスケジュールを作

成する問題を考える。ここである機械がある仕事に、ある特定の時間に割り当てられねばならないという種類の制約の下で、すべての仕事をある一定の時間内に終了できるようなスケジュールが存在するかどうかを論ずる問題

(3) 農業試験場等での実験計画の作成に際して、ある水準の組み合わせがある因子に割り当てられねばならないという制約の下でそれらの制約を満足するような実験計画が存在するかどうかを論ずる問題

上のような問題は、いずれもまだ解答を与えられていない問題であるが、この論文にあるアプローチはこれらへの何らかの手助けにはなるものであろう。

(おおやま たつお)
技術経済研究部