数理計画法最近の話題

今野　浩

数理計画法最近の話題

本稿では，最近の数理計画法のいくつかのトピックを簡単にサーベイする。凸型計画問題についてはある程度の解決をみた現段階での数理計画界の大きな課題の一つは，非凸型計画問題の global な最適解を求める問題であるが，ここでは主としてその第一歩である非凸型２次計画問題に関連するいくつかの話題について述べることにする。

1. 線型相補計画問題と Complementary Pivot Algorithm

1. 1. 線型相補計画問題

いま $M\in R^{P\times P}$, $q\in R^P$ が与えられたとする。このとき線型相補計画問題 (Linear Complementarity Problem) M/q〔17〕とは，次の性質を満たす $z\in R^P$ を見出す問題である。

$$(1.1)\begin{cases} q+Mz\geq 0 \\ z\geq 0 \\ z^t(q+Mz)=0 \end{cases}$$

補助変数wを使えばこれは

$$(1.1')\begin{cases} w=q+Mz\geq 0 \\ z\geq 0 \\ w^tz=0 \end{cases}$$

とかける。ここで，この形に定式化される２，３の問題を例として挙げておこう。

例 1. 1.　２次計画問題

２次計画問題は

$$(1.2)\begin{cases} \min\limits_x c^tx+\frac{1}{2}x^tDx \\ s.t\ \ Ax\geq b,\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

で定義される。ここで $c\in R^n$, $D\in R^{n\times n}$, $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^m$, $x\in R^n$ である。Kuhn–Tucker の定理〔15〕によれば，$\bar{x}$が (1.2) の最適解であるためには，次の性質をみたすベクトル $\bar{y}\in R^m$ が存在しなくてはならない。

$$(1.3)\begin{cases} \bar{u}=D\bar{x}-A^t\bar{y}\geq 0 \\ \bar{v}=-b+A\bar{x}\geq 0 \\ \bar{x}\geq 0 \\ \bar{y}\geq 0 \\ \bar{x}^t(c+D\bar{x}-A^t\bar{y})=0 \\ \bar{y}^t(b-A\bar{x})=0 \end{cases}$$

ここで

(1.4) $w=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $q=\begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$,

$$M=\begin{pmatrix} D & -A^t \\ A & 0 \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと，(1.3) は (1.1′) の形に直すことができる。もし D が非負定値行列であれば (1.3) をみたす $\bar{x}$ は (1.2) の最適解となることが知られている。またこのとき (1.4) の M も非負定値行列となることに注意しておく。

例 1. 2 非ゼロ和2人ゲームの均衡解〔19〕

2人のプレーヤーⅠ，Ⅱがゲームを行なうものとし，それぞれ m, n コの戦略が利用可能であるとする。プレーヤーⅠが戦略 i をⅡが戦略 j を採用したときのⅠ，Ⅱの損失をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする。もしすべての i, j について

$$a_{ij}+b_{ij}=0$$

が成立するときはこのゲームはゼロ和2人ゲームと呼ばれるが，それ以外の場合は非ゼロ和2人ゲームもしくはバイマトリックス・ゲームと呼ばれる。いま $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ を定義し，このゲームを $\Gamma(A,B)$ と書くことにする。Ⅰ及びⅡの混合戦略とはそれぞれ $e_n=(1,1,\cdots,1)^t\geq R^n$, $e_m=(1,1,\cdots,1)^t\geq R^n$ を用いて

(1.5) $\begin{cases} x\geq X=\{x\,|\,e_m{}^tx=1,\ x\geq 0\} \\ y\geq Y=\{y\,|\,e_n{}^ty=1,\ y\geq 0\} \end{cases}$

を満たすものである。

さてゲーム $\Gamma(A,B)$ の Nash 均衡解〔19〕とは，次の条件を満たす $(\bar{x},\bar{y})$ のことをいう。

(1.6) $\begin{cases} \bar{x}^tA\bar{y}\leq x^tA\bar{y} & \forall x\geq X \\ \bar{x}^tB\bar{y}\leq \bar{x}^tAy & \forall y\geq Y \end{cases}$

これは，Ⅱの混合戦略が $\bar{y}$ であるとしたときに $\bar{x}$ がⅠにとって損失の最も少ない混合戦略となり，またⅠの混合戦略が $\bar{x}$ であるとしたとき $\bar{y}$ がⅡにとって最適な戦略となるための条件である。いま大きな正数 K を用いて $a_{ij}'=a_{ij}+K$, $b_{ij}'=b_{ij}+K$ を定義し，$A'=(a_{ij}')$, $B'=(b_{ij}')$ に伴う $\Gamma(A',B')$ の Nash 均衡解を考えると，それは $\Gamma(A,B)$ の Nash 均衡解と一致することが分る。したがって $A>0$, $B>0$ を仮定しても一般性は失なわれない。

(1.6) は直ちに次のシステムと同等であることが示される。

(1.7) $\begin{cases} (\bar{x}^tA\bar{y})e_m\leq A\bar{y} \\ (\bar{x}^tB\bar{y})e_n\leq B^t\bar{x} \\ \bar{x}\in X,\ \bar{y}\in Y \end{cases}$

(1.7) を満たす $(\bar{x},\bar{y})$ を求めることは次のシステムを解くことと同等になる。

(1.8) $\begin{cases} u=Ay-e_m \quad u\geq 0,\ y\geq 0 \\ v=B^tx-e_n \quad v\geq 0,\ x\geq 0 \\ x^tu+y^tv=0 \end{cases}$

なぜなら (1.8) の解を (x^*,y^*,u^*,v^*) とすると

$$(\bar{x},\bar{y})=(x^*/e_m{}^tx^*,\,y^*/e_n{}^ty^*)$$

が (1.7) の解となるし，また $(\bar{x},\bar{y})$ を (1.7) の解とすると

$$(x^*,y^*)=(\bar{x}/\sqrt{\bar{x}^tB\bar{y}},\,\bar{y}/\sqrt{\bar{x}^tA\bar{y}})$$

が (1.8) を満たすからである ($A>0$, $B>0$ であるから $\bar{x}^tB\bar{y}>0$, $\bar{x}^tA\bar{y}>0$ である)。

ここで

(1.9) $w=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $q=\begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix}$,

$$M=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると，(1.8) は (1.1′) と同じ形になる。

ここで (1.1) に関して

(1.10) $Z(q,M)=\{z\,|\,q+Mz\geq 0, z\geq 0\}$

を定義すると，すべての $z\in Z(q,M)$ について

(1.11) $\varphi(z)=z^t(q+Mz)\geq 0$

が成立する。従って

$$(1.12)\quad \begin{cases} \min \varphi(z)=z^t(q+Mz) \\ s,t\ \ z\in Z(q,M) \end{cases}$$

の最適解 $\bar{z}$ が $\varphi(\bar{z})=0$ となっていれば，$\bar{z}$ は線型相補計画問題の解を与えることになる。

定義 1. 1　$M\in R^{P\times P}$ は次の条件を満たすとき“十分行列”と呼ばれる。

$$x_i(Mx)_i\leq 0,\ \ i=1,\cdots\cdots,p$$

$$(1.13)\quad \longrightarrow x_i(Mx)_i=0,\ \ i=1,\cdots\cdots,p$$

例　非負定値行列は十分行列である。

定理 1. 1　もし M が十分行列で $Z(q,M)\neq\varphi$ ならば，

$$\min\{\varphi(z)\,|\,z\in Z(q,M)\}=0$$

である。

証明　Frank-Wolfe の定理により，(1.12) には最適解 $\bar{z}$ が存在する。したがって，Kuhn-Tucker の定理により，次の条件をみたすベクトル $\bar{y}\geq 0$ が存在する。

$$(q+M\bar{z}+M^t\bar{z}-M^t\bar{y})_i\geq 0$$

$$(1.14)\quad \bar{z}_i(q+M\bar{z}+M^t\bar{z}-M^t\bar{y})_i=0$$

$$i=1,\cdots\cdots,p$$

$$\bar{y}_i(q+M\bar{z})_i=0$$

ここで M が十分行列であることを用いると，$\varphi(\bar{z})=0$ であることが示される。

1. 2.　Complementary Pivot Algorithm

ここでは (1.1) を満たす z を見出すための C. Lemke and J. Howson〔17〕による Complementary Pivot Algorithm (C. P. A.) について述べる。

まず (1.1′) に人為変数 z_0 (≥ 0) を導入してシステムを拡大する。

$$(1.15)\quad w=q+e_Pz_0+Mz,\ \ z_0\geq 0,\ \ z\geq 0,\ \ w\geq 0$$

ここで $e_P=(1,1,\cdots\cdots,1)^t\in R^P$ である。(1.15) に対応して次の集合を定義しておく。

$$(1.16)\quad Z_0(q,M)=\{(z_0,z)\,|\,w=q+e_Pz^0+Mz\geq 0, z_0\geq 0, z\geq 0\}$$

仮に (1.15) の解で $z_0=0$ でかつ $w^tz=0$ となるものがみつかればそれは線型相補計画問題 M/q の解を与える。(1.16) は $p+1$ 次元空間の凸多面体を定義するが，いまこの凸多面体が退化していないものとする。このとき，$2p+1$ 個の変数 (z_0,z,w) のうちちょうど $p+1$ 個が正の値をとり，残りの p 個がゼロとなる (1.15) の解は凸多面体 $z_0(q,M)$ の端点（あるいは基底解）を与える。これらの端点のうち $w^tz=0$ を満たすものをここでは“ほとんど相補的”あるいは“almost complementary な”端点（略して A. C. 端点）と呼ぶが，Complementary Pivot Algorithm (C. P. A.) は

$$(1.17)\quad (z_0,z,r)=(-q_r,0,q-q_r),\quad (q_r=\min_{1\leq t\leq P} q_i)$$

に対応する A. C. 端点から出発して，隣接する A. C. 端点をたどることによって，$z_0=0$ となる相補解を発生させるが，あるいは $Z(q,M)=\varphi$ なることを示そうとするものである。

(1.16) が退化していないという条件の下で，ある A. C. 基底解においては w_ν と z_ν とがともに非基底となる変数の組がただ1つだけ存在する。ここで他の非基底変数を0に保ったまま z_ν または w_ν を増加させると A. C. edge が生成される。したがって A. C. 端点には，ちょうど2本の A. C. edge が対応することになる。

いま非基底変数 z_ν を0から次第に増加させてやると，

(i)　あるところまで増加させると，基底変数のあるものが0となる（これを Blocking Variable とよぶ）か

(ii)　基底変数の非負性を保ったままどこまでも増加させることができるか

のいずれかである。(ii) の場合は ray が生成されることになり，計算を中止する。(i) の場合，z_0 が blocking variable となれば，生成された基底解は，相補解となるし，また z_0 以外のものが blocking variable となれば，(1.16) が退化していないという仮定の下では，blocking variable がユニークに決まり，これが z_v の代りに非基底変数となる A. C. 基底解が生成される。

C. P. A. の掃出し基準 : blocking variable

Complementary Pivot Algorithm のフローチャート

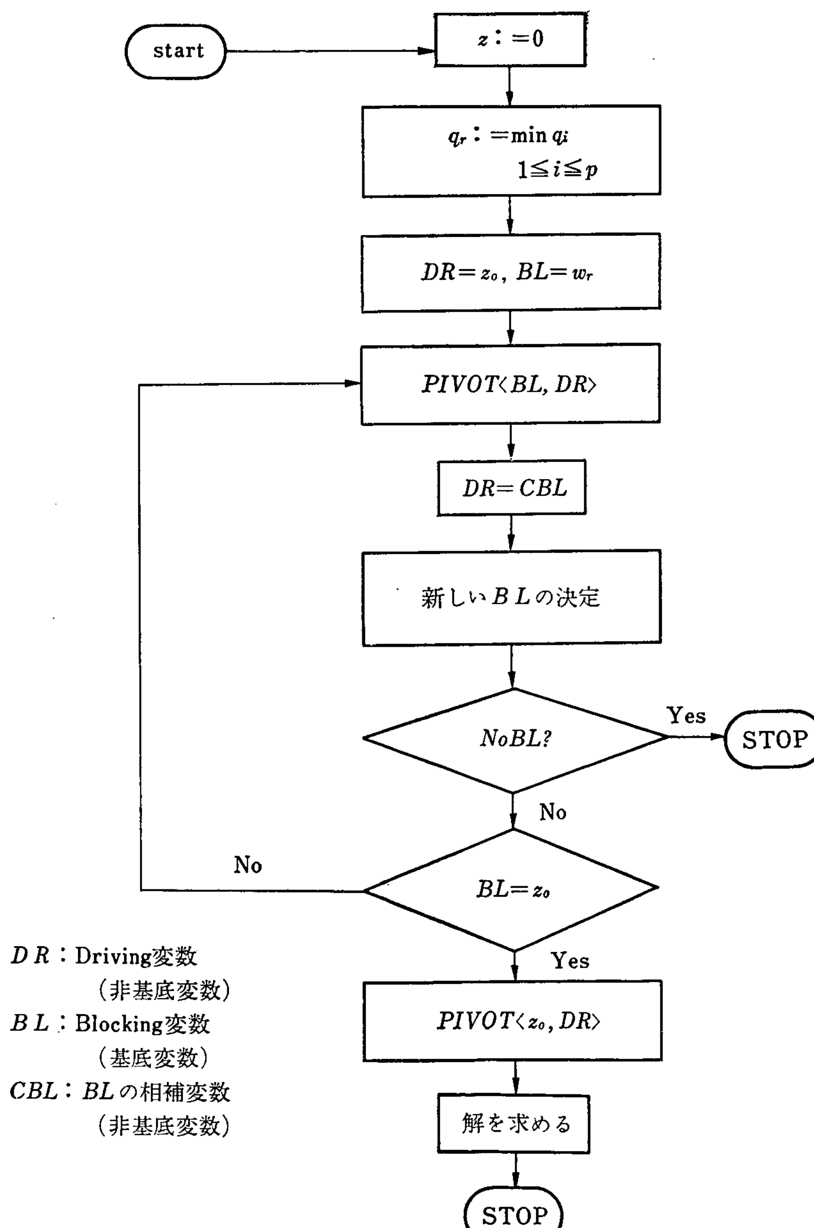

図 1.1

の対となる変数を次に増加させる非基底変数とする（これを driving variable とよぶ)。

定理 1. 2 (1.16) が退化していない場合，上のルールで2度以上生成される A. C. 基底解があるとすれば，最初に生成されるそのような基底解は，アルゴリズムの出発基底解 (1.17) である。

証明 上述のルールと下図とから明らか。

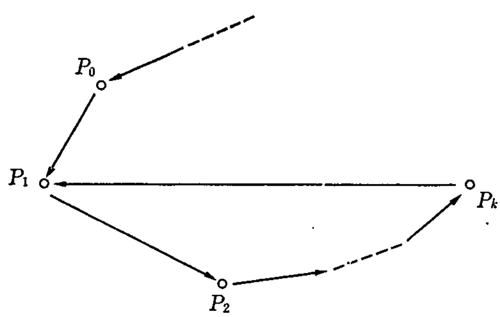

図 1.2

定理 1. 3 もしアルゴリズムの出発端点が A. C. ray の端末になっているならば，この C. P. A. は有限回の手続きで相補解を発生させるか，あるいは別の ray を発生させて終了する。

証明 定理 1. 2 から直ちに導かれる。

(1.15) で $z=0$ に保ったまま z_0 を増加させてゆくと，wは次第に増加し，決して0以下になることはないので $(z_0, z, w)=(t, 0, q+te_P)$ は (1.16) の ray を与える。明らかに (1.17) で与えられる出発点はこの ray の端末になっているので，上の定理から，C. P. A. アルゴリズムは決してサイクリングを起こすことなく，有限回の手続きで相補解または，はじめの ray とは異なる ray（これを secondary ray とよぶ）を発生して終了することになる。

ここで，secondary ray の意味するところを詳細に吟味すると，次の定理が導かれる。

定理 1. 4 Secondary ray が生成されるのは，

$$u_i(Mu)_i \leq 0 \quad i=1, \cdots\cdots, p$$

となるベクトル $0 \neq u \geq 0$ が存在する場合[2] に限られる。

証明 いま $Z_0(q, M)$ の端点に対応する解 (w^*, z_0^*, z^*) に到達した後に A. C. ray が生成されて計算が終了したとすると，次の条件を満たすベクトル $(w^h: z_0^h, z^h)$ が存在することになる。

$$(1.18) \quad w^h = e_P z_0^h + Mz^h$$
$$0 \neq (w^h: z_0^h, z^h) \geq 0$$

さらにすべての $\lambda \geq 0$ に対して

$$(1.19) \quad w^* + \lambda w^h = q + e_P(z_0 + \lambda z_0^h) + M(z^* + \lambda z^h)$$

$$(1.20) \quad (w_i^* + \lambda w_i^h)(z_i^* + \lambda z_i^h) = 0, \quad i=1, \cdots\cdots, p$$

が成立する。

いま $z^h=0$ とすると $z_0^h>0$ でなくてはならない（なぜならもし $z_0^h=0$ とすると $w^h=0$ となり，$(w^h, z_0^h, z^h)\equiv 0$ となってしまう）が，このとき $w^h=e_P z_0^h>0$ となる。もし $w^h>0$ であると (1.20) により

$$z_i + \lambda z_i^h \equiv z_i = 0, \quad i=1, \cdots\cdots, p$$

となる。

これは生成された ray がはじめの ray と同一のものであることを意味するので，$z^h \neq 0$ でなくてはならない。

また (1.20) から

$$z_i^* w_i^* = z_i^* w_i^* = z_i^h w_i^h = 0, \quad i=1, \cdots\cdots, p$$

ここで (1.18) の第 i 式に z_i^h をかけると

$$z_i^h w_i^h = 0 = z_i z_0^h + z_i^h (Mz^h)_i \quad i=1, \cdots\cdots, p$$

が得られる。これによって定理が証明された。

以下証明抜きで 2，3 の結果を記そう。

2) 即ちMが十分行列でない場合。

定義 1. 2　p 次行列 M は次の条件を満たすとき copositive-plus 行列と呼ばれる。

（i）　$u^tMu \geq 0 \quad \forall u \geq 0$

（ii）　$u^tMu=0,\ u \geq 0 \Rightarrow (M+M^t)u=0$

（非負定値行列及び $M>0$ なる行列はこの性質を満たす）

また，M 次正方行列は，そのすべての主小行列式が正であるときに P-行列であると呼ばれる。

定理 1. 5　もし M が copositive-plus であるならば，secondary ray の生成は $Z(q, M)=\phi$ を意味し，M が P-行列ならば，すべての q に対して C. P. A. アルゴリズムは相補解を発生して終了する。

この定理の証明については〔5〕を参照されたい。

次に線型相補計画問題に関する最近の研究結果に少しふれておこう。まず，Eaves〔10〕はいかなる M と q に対して LCP 一意的な解が存在して CPA がその解を発生させうるかを詳細に吟味し，また退化現象がある場合のための辞書式 CPA を確立した。更に彼は〔11〕で2次計画問題の場合には任意の対称な D に対して CPA が停留点または無限解を生成するか，許容解が存在しないことを示しうることを証明した。一方 LCP の拡張として Cottle-Dantzig〔6〕は M が正方でない場合に関する一般化 LCP を考察し，〔5〕と類似の結果をえている。また Karamardian〔12〕は

非線型相補計画問題：実ベクトル関数 $f(\cdot)$ が与えられたとき $f(z) \geq 0$ で $z^tf(z)=0$ となるベクトル $z \geq 0$ を見出すこと

の解の存在と一意性の条件を考察している。さらに Scarf〔22〕は行列 $N^i \varepsilon R^{m_i \times n}$ とベクトル $q^i \varepsilon R^{m_i}$, $i=1, \cdots\cdots, l$ が与えられたとき，

$$(1.21)\quad \begin{aligned} &r_i(x) \equiv \max_j (N^ix-q^i)_j \geq 0, \\ &\qquad\qquad\qquad i=1, \cdots\cdots, l \\ &\sum_{i=1}^{l} x_i r_i(x)=0,\ x \geq 0 \end{aligned}$$

をみたすベクトル x を見出す問題を考察し，もし $N^i=1, \cdots\cdots, l$ が

$$(1.22)\quad x \geq 0\ ,\quad \sum_{i=1}^{l} x_i \max_j (N^ix)_j \leq 0 \text{ なら } x \equiv 0$$

をみたす行列であるならば上記の問題には必ず解が存在して，CPA によって解が求まることを示した。彼はさらにこの結果を使って Brouwer と角谷の不動点定理〔23〕の constructive な証明に成功している。CPA が動機となって得られたもう一つの理論的成果は，抽象多面体 (abstract polytope) なる概念が導入されて〔1〕，凸多面体の組合せ論的性質の研究に1つの道具を与えたことであろう。

なお，この方面のサーベイとしては，少々読み辛いが C. Lemke〔16〕のものがある。

2.　双線型計画法

2. 1　線型計画法とその様々な拡張

標準型線型計画問題は一般に次の形で定義される。

$$(2.1)\quad \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.t. & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \\ & x_i \geq 0,\quad i=1, \cdots\cdots, n \end{cases}$$

シンプレックス法によってこの問題が解かれて以来，これらの種々の拡張が考えられた。まず一般化された線型計画問題 (Generalized LP)〔8〕とは次のようなものである。

$$(2.2)\quad \begin{cases} \max\limits_{x_i, (c_i, a_i)} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.t & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_i \geq 0,\ i=1,\cdots\cdots,n \\ (c_i a_i) \in c_i \text{ (凸集合)} \end{array}\right.$$

もし，c_i が線型制約式によって定まる凸集合であれば，いわゆる column generation technique を用いることにより，有限回の反復によって (2.2) の最適解が求まる〔8〕。

線型計画問題を非線型な場合へもっともストレートに拡張したものは次の2次計画問題である。

$$(2.3)\left\{\begin{array}{ll} \min \varphi(x)=c^t x+\frac{1}{2}x^t Q x & \\ s.t \quad Ax=b & \\ \quad x \geq 0 & \end{array}\right.$$

もし Q が非負定値行列であれば，目的関数は凸関数となり，いくつかのアルゴリズムによって最適解が求まる〔24〕(前章で述べた C. P. A. はその一つである)。

さて，つぎにわれわれは，LP のもう一つの拡張として次のような拡張された線型計画問題 (Extended LP) を考えよう。

$$(2.4)\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{p,x} f(p,x)=p^t x \\ s.t \quad x \in X \text{ (凸集合)} \\ \quad p \in P \text{ (凸集合)} \end{array}\right.$$

これは2つの独立な凸集合に属するベクトルの内積を最大化する問題であるが，これを少し一般的にして次のような双線型計画問題 (Bilinear Programming Problem 略して BLP)〔2〕を定義する。

$$(2.5)\left\{\begin{array}{l} \max \varphi(x,y)=c^t x+d^t y+x^t C y \\ s.t \quad Ex \leq e,\ x \geq 0 : X_0 \\ \quad Fy \leq f,\ y \geq 0 : Y_0 \end{array}\right.$$

ここで $x \in R^m$, $y \in R^n$ その他は適当な次元のベクトルまたは行列とする。これはいうまでもなく2次計画問題 (2.3) の一種であるが，その形に直すと，

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & C^t \\ C & 0 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

なる形をして居り，一般に $\varphi(x,y)$ は凸関数でも凹関数でもない。

2.2 双線型計画問題として定式化されるいくつかの問題

a. 2段階ゲーム〔7〕,〔14〕

いま2人のプレーヤーが次のようなゲームを行なうものとする。第1段階で第1プレーヤーが，実行可能戦略の集合 X からある戦略 x を選択する。第2段階で第2プレーヤーは x によってきまる実行可能戦略の集合 $Y(x)$ からある

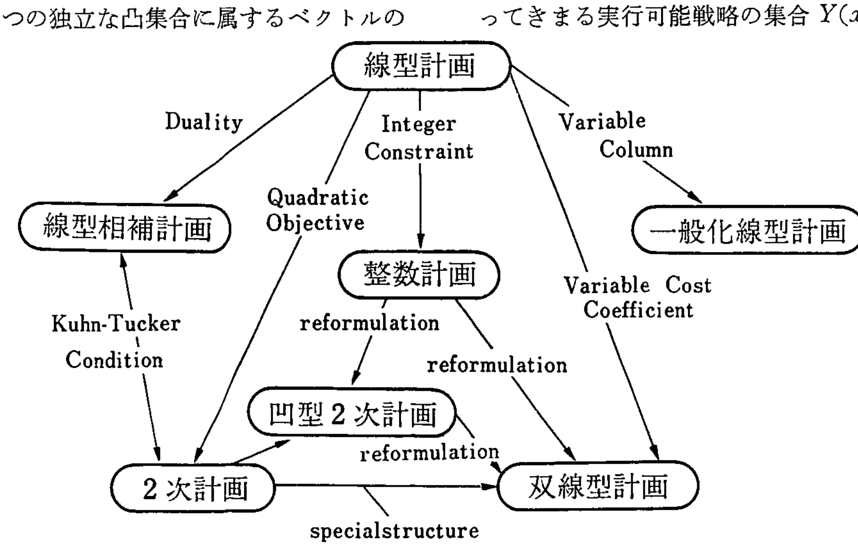

図 2.1 種々の問題の相互関係

戦略yを選択する。いま(x,y)に伴うプレーヤー1からプレーヤー2への支払いが,

$$p^t x + q^t y$$

で与えられるとしよう。xが与えられれば第2プレーヤーは

$$\max\{q^t y \mid y \in Y(x)\}$$

を解けば良いことになる。一方第1プレーヤーは自分の損失を最少化するには

$$(2.6)\quad \min_x \{p^t x + \max_y \{q^t y \mid y \in Y(x)\} \mid x \in X\}$$

を解かなければならない。いま簡単のため

$$X = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$Y(x) = \{y \mid Bx \leq d + Cx, y \geq 0\}$$

で与えられるものとすると,線型計画問題の双対定理により,

$$\begin{aligned}&\max\{q^t y \mid y \in Y(x)\}\\&=\max\{q^t y \mid By \leq d + Cx, y \geq 0\}\\&=\min\{(d+Cx)^t u \mid B^t u \geq q, u \geq 0\}\end{aligned}$$

となり(2.6)は

$$\begin{aligned}&\min_x\{p^t x + \min[(d+Cx)^t u \mid B^t u \geq q, u \geq 0] \mid x \in X\}\\&=\min_{x,u}\{p^t x + d^t u + u^t Cx \mid B^t u \geq q, u \geq 0 : Ax \leq b, x \geq 0\}\end{aligned}$$

なる双線型計画問題に変換される。

b. 0−1 整数計画問題と凹2次計画問題の双線型計画問題への変換〔14〕,〔9〕

いま 0−1 整数計画問題

$$(2.7)\quad \begin{cases}\max c^t x\\ s.t \quad Ax = b\\ x_i = 0 \text{ or } 1 : i = 1, \cdots\cdots, n\end{cases}$$

の実行可能解を求めることを考える(実はこれは上の問題の最適解を求めることと等価である)。ここで,この問題が次の双線型計画問題と等価であることを示そう。

$$(2.8)\quad \begin{cases}\min \varphi(u,v) = u^t(e_n - v) + v^t(e_n - u)\\ s.t \quad Au = b,\ Av = b\\ \qquad 0 \leq u \leq e_n,\ 0 \leq v \leq e_n\end{cases}$$

ここで $e_n = (1, 1, \cdots\cdots, 1)^t \in R^n$ である。

いまもし $Ax = b$ を満たす 0−1 解 $\bar{x}$が存在したとすると,xは(2.8)の制約を満たし $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ となる。明らかに(2.8)の制約をみたすすべての u, v に関して $\varphi(u,v) \geq 0$ であるから,$\min \varphi(u,v) = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ となる。逆にいま $\min \varphi(u,v) = \varphi(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ であるとすると,$\bar{u}^t(e-v) = 0$, $\bar{v}^t(e-\bar{u}) = 0$ となり,それゆえすべての i について $\bar{u}_i(1-\bar{v}_i) = 0$, $\bar{v}_i(1-\bar{u}_i) = 0$ が成立する。いま $\bar{u}_i = 0$ とすると,$\bar{v}_i = 0$ となり,$\bar{u}_i > 0$ とすれば $\bar{v}_i = 1$ となり,$\bar{u}_i = 1$ が導かれる。従っていずれの場合も $\bar{u}_i = \bar{v}_i$ で 0 または 1 となる。よって等価性が示された。

更に一般的に,次の凹2次計画問題

$$\begin{aligned}&\min 2c^t x + x^t Q x \quad (Q: n.s.d.)\\&s.t \quad Ax = b,\ x \geq 0\end{aligned}$$

は,次の双線型計画問題と同等であることが示される。

$$\begin{aligned}&\min c^t u + c^t v + u^t Q v\\&s.t \quad Au = b,\ u \geq 0\\&\qquad Av = b,\ v \geq 0\end{aligned}$$

c. 格子状ネットワーク上での最適プラントロケーションと近隣諸都市からの最適原材料購入量の同時決定問題〔14〕

いま平面上に m 個の都市があり,都市 i での原料 $j (j = 1, \cdots\cdots, n)$ の単位価格を c_{ij}, その供給能力を a_{ij} とする。いまこの平面上にあるプラントを建設することを計画している企業があるものとする。このプラントの原料 j に対する需要を b_j, その単位量・単位距離あたりの輸送費を f_j とする。いま都市 i の位置を (x_i, y_i) $(i = 1, \cdots\cdots, m)$ としたときプラントの

立地点を (x_0, y_0) とし，u_{ij} を都市 i で購入すべき原料 j の量とする。このとき，最適なプラント・ロケーションと最適原材料購入パターンを同時に定める問題は次の形に定式化できる。

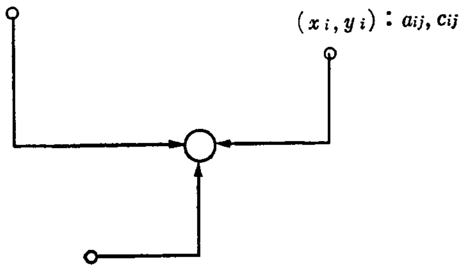

図 2.2

$$\begin{cases} \min\limits_{x_0, y_0, u} C(x_0, y_0 : u) \\ \quad = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} [c_{ij}u_{ij} + f_j u_{ij}(|x_i - x_0| \\ \qquad\qquad + |y_i - y_0|)] \\ s.t \quad \sum\limits_{i=1}^{m} u_{ij} \geq b_j \quad j=1, \cdots\cdots, n \\ \quad 0 \leq u_{ij} \leq a_{ij} \quad i=1, \cdots\cdots, m : j=1, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots, n \end{cases}$$

適当な変数変換によってこれは双線型計画問題の形に直すことができる。

2.3 双線型計画問題の最適解を求めるアルゴリズム〔13〕

ここでは次の双線型計画問題（BLP）のグローバルな最適解を求めるアルゴリズムについて述べる。

$$\begin{aligned} &\max \varphi(x, y) = c^t x + d^t y + x^t C y \\ (2.9) \quad &s.t \quad Ex \leq e, \ x \geq 0 : X_0 \\ &\qquad Fy \leq f, \ y \geq 0 : Y_0 \end{aligned}$$

BLP の目的関数は既に述べたとおり凸でも凹でもないが，次に示す重要な性質をもっている。

定理 2.1　X_0, Y_0 がともに有界かつ non-empty であれば，それぞれ X_0, Y_0 の端点となる最適解 (x^*, y^*) が存在する。

証明　いま，$(\bar{x}, \bar{y})$ を BLP の最適解とする。$\bar{x}$ を固定すると

$$\max\{\varphi(\bar{x}, y) \mid y \in Y_0\}$$

は LP となり最適な端点解 $y^* \in Y_0$ が存在して

$$\varphi(\bar{x}, y^*) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

となる。またここで y^* を固定し，

$$\mathrm{man}\{\varphi(x, y^*) \mid x \in X_0\}$$

なる LP を解くと最適な端点解 $x^* \in X_0$ が存在して

$$\varphi(x^*, y^*) \geq \varphi(\bar{x}, y^*)$$

となる。以上により $\varphi(x^*, y^*) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ が得られたが，$(\bar{x}, \bar{y})$ は BLP の最適解であるので $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \geq \varphi(x^*, y^*)$ となり，結局 $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x^*, y^*)$ によって (x^*, y^*) は BLP の最適な端点解となることが分った。

この定理をもとにして考えうるアルゴリズムを列挙すると次のようになる。

1. あらゆる X_0, Y_0 の端点を全部調べ上げる（例えば Balinski の方法〔3〕による）
2. K. Murty らの extreme point ranking 法を用いる（Cabot & Francis〔4〕，本質的には 1 と同じ）
3. あらゆる Kuhn-Tucker (Stationary) Point を全部数え上げる（Eaves〔11〕，Mylandes〔18〕）
4. 多数の出発点から多くの local optimum を求めて，その中で一番良いものをもって最適解を近似する（S. Reiter〔20〕流の行き方）
5. Cutting Plane アプローチによって実行可能領域を次第に縮少して遂には全実行可能領域を除去する（K. Ritter,〔21〕, H. Tui〔25〕らのアイディアを発展拡張させる）

これらのうち1（及び2）は計算量の観点から現実味に乏しく，3はわずかに緒についた段階にあり，結局現実的なアプローチは4または5であると思われるが，ここでは5のアプローチ〔13〕について述べることにする。ここで述べるアルゴリズムの特徴は：

1. シンプレックス法以外の手続きは何も使わない。
2. ある条件の下で，有限回の反復で ε-optimal[1] な端点解が求まる。
3. 計算途中で副産物として最適解の上限が求まる。

a．局所的最適解を求める手続

任務の実行可能解 $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$ が与えられたとして（必要があれば Phase I 手続きを用いる）次の手順で解を改善してゆく。

$$x^{i+1} = \mathrm{argmax}\{\varphi(x, y^i) \mid x \in X_0\}$$
$$y^{i+1} = \mathrm{argmax}\{\varphi(x^{i+1}, y) \mid y \in Y_0\}$$

これらの問題はいずれも LP 問題であり，明らかに $\varphi(x^{i+1}, y^{i+1}) \geq \varphi(x^i, y^i)$ が成立する。そこで通常の退化対策〔8〕を施せば，有限回の反復によって $x^{i+1} = x^i$ が実現される。

ここでシステム (2.9) を (x^i, y^i) における非基底変数によって表現する（幾何学的にはこのことは，座標変換によって x^i, y^i をそれぞれ X_0, Y_0 の原点とし，それに隣接するエッジを座標軸に設定することに相当する)。変数の名前を入れかえると，変換後のシステムはやはり (2.9) の形をしており，かつ $c \leq 0$, $d \leq 0$ であることが示される。

$$(2.10)\quad \begin{cases} \max \varphi(x, y) = c^t x + d^t y + x^t C y \\ s.t \quad Ex \leq e, \quad x \geq 0 : X_0 \\ \qquad Fy \leq f, \quad y \geq 0 : Y_0 \\ \qquad (c \leq 0, \ d \leq 0 : e \geq 0, \ f \geq 0) \end{cases}$$

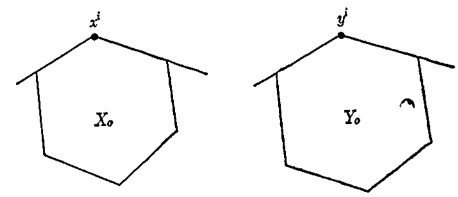

図 2.3

定理 2. 2 システム (2.10) の原点は

（i） もし $\{(a) c \leq 0$, $d \leq 0$ でかつ (b) もし c_{ij} ならば $c_i < 0$ または $d_i < 0$ が成立つ$\}$ ならば局所的最適解 (local optimum) である。

（ii） もし $c \leq 0$, $d \leq 0$ で $C \leq 0$ であれば，全体的最適解 (global optimum) である。

証明 （略）

この定理により，もし $C \leq 0$ ならば (2.10) の原点（即ち (x^i, y^i)）は global optimum であるので，いま $C \leq 0$ を仮定し次のインデックス・セットを定義する。

$$(2.11)\quad K = \{(i, j) \mid c_{ij} > 0\}$$

ここで原点に隣接する端点の座標 x_i^*, y_j^* を現在のシンプレックス・タブローから計算して

$$(2.12)\quad \begin{aligned} \varphi_{i0j0} &= c_{i0} x_{i0}^* + d_{j0} y_{j0}^* + c_{i0j0} x_{i0}^* y_{j0}^* \\ &= \max\{\varphi_{ij} = c_i x_i^* + d_j y_j^* + c_{ij} x_i^* y_j^* \mid (i, j) \in K\} \end{aligned}$$

を求める。もし $\varphi_{i0j0} > 0$ なら x_{i0}, y_{j0} の方向にある端点に移動し再び山登りを再開する。もし $\varphi_{i0j0} \leq 0$ なら，原点を locally maximum vertex と名づけて切断平面 (cutting plane) を導入する。

b．Locally Maximum Vertex "Cutting Plane" の導入

1) (x^*, y^*) が ε-optimal であることは，$\varphi(x^*, y^*) \geq \varphi(x, y) - \varepsilon \ \forall x \in X_0$. $\forall y \in Y_0$ が成立することである。

いますでに p 個の locally maximum Vertex が検出されたものとする。φ_j を j 番目の locally maximum vertex での目的関数値とし

(2.13) $\varphi_0=\max\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_P\}$

を定義する。

いま，cutting plane を導入するために，$\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ を X_0, Y_0 のある superset として，非負の σ に対して次の関数 $\Psi(\sigma)$ を定義する。

(2.14) $\Psi(\sigma)=\max\{\varphi(x,y)\,|\,g^tx+h^ty\leq\sigma,$
$x\in\overline{X}_0, y\in\overline{Y}_0\}$

ここでベクトル g, h は $0\neqq(g,h)\geq 0$ をみたす定数ベクトルとする。いまもしある正の定数 σ^* に対して

(2.15) $\Psi(\sigma)\leq\varphi_0-\varphi_P\quad 0\leq\sigma\leq\sigma^*$

であれば，

(2.16) $g^tx+h^ty\geq\sigma^*$

は変換されたシステムの原点（即ち (x^p,y^p)）を除去し，かつ φ_0 より大きな目的関数値を与えるような実行可能解を除去しない，合法的なカットを与える。

ここで問題となるのは，なるべく容易に σ^* を計算できるよう，かつなるべく深いカットが入れられるよう g, h, $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ をえらぶことであるが，ここでは次のような2つのものを候補として選択する。

① $g>0$, $h>0$; $\overline{X}_0=R^m{}_+$, $\overline{Y}_0=R^n{}_+$

②—1 $g>0$, $h=0$; $\overline{X}_0=R^m{}_+$, $\overline{Y}_0=Y_p$

②—2 $g=0$, $h>0$; $\overline{X}_0=X_p$, $\overline{Y}_0=R^n{}_+$

③—1 $g>0$, $h=0$; $\overline{X}_0=R^m{}_+$,
$\overline{Y}_0=\{y\in R^n{}_+\,|\,\xi^ty\leq\xi_0\}$

③—2 $g=0$, $h>0$: $\overline{X}_0=\{x\in R^m{}_+\,|\,\xi^tx\leq\xi_\cdot\}$, $\overline{Y}_0=R^n{}_+$

①または③のような選択を行なうと，$\Psi(\sigma)$ の解析的な形が σ の2次式として求まり，σ^* の計算は非常に容易になる。しかしこれらは一般に浅いカットを導く。また①で生成されるカット $g^ty+h^ty\geq\sigma^*$ を導入すると，制約式の X 空間 Y 空間への分解が不可能となる。一方②は σ^* を求めるために一連のパラメトリック LP を解くことを必要とするが，一般に分解可能な深いカットを導く。いずれの場合も，$\varphi(x,y)$ の特殊な形，即ち x 及び y に関して線型であることを利用すると，$\Psi(\sigma)$ が σ の比較的簡単な関数として求まることを積極的に利用するが，以下 $g^tx\geq\sigma_X$ なるカット，即ち ②—1 について説明する。この場合，関数 $\Psi(\sigma)$ は次の式で定義される：

(2.17) $\Psi(\sigma)=\max\{\varphi(x,y)=c^tx+d^tCy\,|$
$g^tx\leq\sigma, x\geq 0 : y\in Y_0\}$

この右辺で定義される問題は BLP であるが，y を固定すると目的関数は x の一次関数であるので，最適解は，$\{g^tx\leq\sigma, x\geq 0\}$ の端点で実現される。しかるにこの端点の集合は，原点と $\{0,\cdots\cdots,0,\sigma/g_i,0,\cdots\cdots,0\}$ なる n 個の点からなる。$x=0$ のときは $\varphi(x,y)=d^ty\leq 0$ なので $\Psi(\sigma)\leq 0\leq\varphi_0-\varphi_p$ となるから，われわれは次の n 個のパラメトリック LP を解けば $\sigma_X{}^*$ を求めることができる。

$$(2.16)\quad \begin{aligned}&\max\ \tilde{\varphi}_i(\sigma:y)=\frac{c_i}{g_i}\sigma+\left(d+\frac{c_i}{g_i}\sigma\right)^t y\\ &s.t\quad y\in Y_0\end{aligned}$$

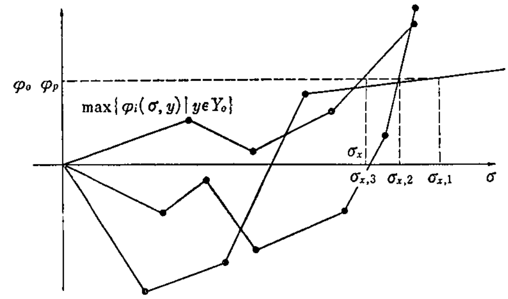

図 2.4

以上のように σ_X を求めるにはかなりの計算が必要となるが，$\varphi_0-\varphi_p$ が比較的小さいときは各問題について数回の pivot operation で $\sigma_{X,i}$ が求まる。また $\varphi_0-\varphi_p$ が大きいときは大きな σ_X が求まるわけであるから，多少計算量がふえても十分計算量とペイするものと考えられる。

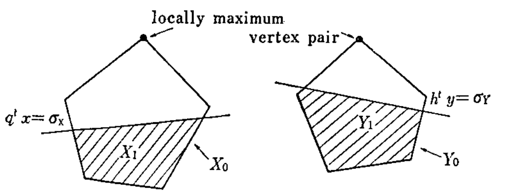

図 2.5

少し計算することによって次の定理が導かれる。

定理 2. 3　もし Y_0 が有界であれば，

$$\sigma_X \geq (\varphi_0-\varphi_p)/dK_X$$

となる。ここで $d=\max\{e^t{}_n y \mid y\in Y_0\}$，$K_X=\max\{c_{ij}/g_i \mid i=1,\cdots\cdots,m:j=1,\cdots\cdots,n\}$ で定義される定数である。

c. Locally Maximum Vertex の逐次計算と手続きの有限回収束

p 番目の locally maximum vertex を検出したあとのシステムは次のような形をしている；

$$(2.19)\begin{cases} \max \varphi(x,y)=c^tx+d^ty+x^tCy & \\ s.t\quad Ex\leq e,\ x\geq 0 & (1) \\ \quad Fy\leq f,\ y\geq 0 & (2) \\ \quad Gx\geq t_x & (3) \\ \quad Hy\geq t_r & (4) \\ \quad Gx+Hy\geq t & (5) \\ \quad g^tx\geq \sigma_X & (6) \\ \quad h^ty\geq \sigma_Y & (7) \\ \quad g^tx+h^ty\geq \sigma & (8) \end{cases}$$

ここで（1），（2）ははじめからの制約式，（3）～（5）は過去 $p-1$ 個の locally maximum vartex において追加された制約式，（6）～（8）は p 番目の locally maximum vertex で追加された制約式とする。

ここで以下の諸量を計算する。

$$(2.20)\begin{cases} d_X=g^tx^{0,p+1}=\max\{g^tx \mid x \text{は（1）と（3）を満たす}\} \\ d_y=h^ty^{0,p+1}=\max\{h^ty \mid y \text{は（2）と（4）を満たす}\} \\ d=g^tx'+h^ty'\equiv\max\{g^tx+h^ty \mid x,y \text{は（1）～（5）を満たす}\} \end{cases}$$

定理 2. 4　もし（i）$d_x\leq\sigma_x$，（ii）$d_y\leq\sigma_y$，(iii) $d\leq\sigma$ のいずれか1つが成立すれば，φ_0 は ε–optimal な解を与える。

証明　(略)

またこの d_x，d_y，d を使うと最適解の上限が次のように与えられる。

$$(2.21)\quad \varphi^*\leq\varphi_p+\max\left\{0,\ \min\left\{kd_xd_y-d_x-d_y,\frac{k}{4}d^2-d\right\}\right\}$$

ここで $k=\max c_{ij}/g_ih_j$ である。

ここで以上のことをもとにして，双線計画問題に対する切断平面アルゴリズム——双線型計画アルゴリズム——を簡潔な形で記すことにする。

双線型計画法アルゴリズム

ステップ1（初期値設定）

$\varphi_0=\varphi_0'=-\infty$，$\varphi=+\infty$，$p=j=1$ とする。許容水準 $\varepsilon>0$ と丸め水準 $\delta>0$ を適当に選ぶ。線型計画法のフェーズによって $x^{0p}\in\text{ext}\,X_0$，$y^{0p}\in\text{ext}\,Y_0$ を定める。もし，X_0，Y_0 のいずれか一方が空集合であれば計算を終了する〔(2.9)には許容解が存在しない〕。さもなければステップ2に行く。

ステップ2（部分最適化）

次の（i）または（ii）が成立するまで(2.10)式のすぐ前の公式によって $x_i^{t+1,p}$, $y^{j+1,p}$ を計算する。

（i） $(x^{k,p},y^{k,p})$ を始点とする半直線が存在してその方向に $\varphi(x,y)$ を無限に増加させることができる。

（ii） $(x^{k+1,p},y^{k+1,p})=(x^{k,p},y^{k,p})$ 　もし（i）が成立すれば，計算を終了する〔(1.3)は無限解をもつ〕。一方もし（ii）が成立すれば $(x^{\infty,p},y^{\infty,p})=(x^{k+1,p},y^{k+1,p})$ としてステップ3に行く。

ステップ3（正準型式表示）

$(x^{\infty,p},y^{\infty,p})$ に対応する正準型式（2.10）を求める。もし $C\leq 0$ ならば計算を終了する〔$(x^{\infty,p},y^{\infty,p})$ は（2.9）の最適解となる〕。その他の場合はステップ4に行く。

ステップ4（局所最大性のテスト）

（2.12）で定義される $\varphi_{i0j0}{}^p$ を計算する。

4. 1　$\varphi_{i0j0}{}^p>0$ の場合

（2.12）で定義される x^*_{i0}, y^*_{j0} へ x_{i0}, y_{j0} を増加させ（即ち隣接する端点 x^{0p}, y^{0p} に移動する），ステップにもどる。

4. 2　$\varphi_{i0j0}{}^p\leq 0$ の場合

〔$(x^{\infty p},y^{\infty p})$ は局所最大端点であるから〕$(x^p,y^p)=(x^{\infty,p},y^{\infty,p})$, $\varphi_p=\varphi\ (x^p,y^p)$ としてステップ5に行く。

ステップ5（切断平面の生成）

$\varphi_0=\max\{\varphi_0,\varphi_p\}$ とする。$\varphi_0'=\varphi_0+\varepsilon$ としてカット $(g^p)^t x\geq\sigma_X{}^*$, $(h^p)^t y\geq\sigma_Y{}^*$, $(g)^{pt}x+(h^p)^t y\geq\sigma^*$ を構成し（なおこの際 φ_0 の替りに φ_0' を用いる），ステップ6に行く。

ステップ6（最適性テストと上限の計算）

（2.20）で定義される $a_X{}^p$, $a_Y{}^p$, a^p と $x^{0,p+1}$, $y^{0,p+1}$ とを計算する。

6. 1　$(a_X{}^p,a_Y{}^p,a^p)\gneq(\sigma_X{}^{*p},\sigma^{*p}{}_Y,\sigma^{*p})$ の場合〔φ_0 とそれに対応する解 (x^*,y^*) は（2.9）の ε-最適な解となる〕。ステップ7に行く。

6. 2　$(a_X{}^p,a_Y{}^p,a^p)\geq(\sigma_X{}^{*p},\sigma_Y{}^{*p},\sigma^{*p})$ の場合。（2.21）の右辺 Φ_p を計算し，$\varphi:=\min[\varphi,\Phi_p]$ とする。

6.2.1　$\varphi\leq\varphi_0+\varepsilon$ の場合〔φ_0 とそれに対応するベクトル (x^*,y^*) は（2.9）の ε-最適な解となる〕。ステップ7へ行く。

6.2.2　$\varphi>\varphi_0+\varepsilon$ の場合

$$X_{p+1}=\{x\,|\,x\in X_p,\ (g^p)^t x\geq\sigma_X{}^{*p}\}$$
$$Y_{p+1}=\{y\,|\,y\in Y^p,\ (h^p)^t y\geq\sigma_Y{}^{*p}\}$$

として，ステップ2へ行く。

ステップ7（ε-最適な端点解の生成）

次の一組の線型計画問題

$$\text{maximize}\{\varphi(x,y_0)\,|\,x\in X_0\}$$
$$\text{maximize}\{\varphi(\bar{x}_0,y)\,|\,y\in Y_0\}$$

を解くことにより，ε-最適な端点解 $(\bar{x}^0,\bar{y}^0)$ を求める。ここで $\bar{x}^0$ ははじめの LP の最適解である（明らかに，もし $\varphi(\bar{x}^0,\bar{y}^0)\geq\varphi(x^0,y^0)+\varepsilon$ であれば，$(\bar{x}^0,\bar{y}^0)$ は（2.9）の最適解となる）。

定理 2. 5　上記のアルゴリズムは，もし X_0 Y_0 が有界でかつすべての p について $\max\limits_{i,j} c_{ij}{}^p$ が一様に有界であれば，有限回で終了する。

定理 2. 6　もし $X_0\neq\phi$, $Y_0\neq\phi$ ならば定理 2. 5 の条件の下で，上記のアルゴリズムは，有限回の手続きで ε-最適な端点解を生成する。

これらの定理の証明については〔13〕を参照して頂きたい。

ここで定理 2. 5 および 2. 6 における“あらゆる p に対して $\max\limits_{i,j} c_{ij}{}^p$ が一様にある定数で押えられる”という仮定について少しふれておこう。ある i, j に対して $c_{ij}{}^p\to\infty$ となるのは，x^p または y^p を定義する基底行列が特異

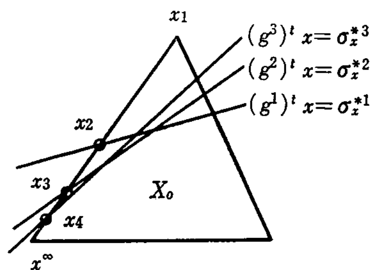

図 2.2

行列に近づくとき，またそのときだけに限ることがわかる。

図 2. 6 はこのような状況の一例を表わしている。しかし，もし $x^p\in\mathrm{ext}\,X_0$ で $y^p\in\mathrm{ext}\,Y_0$ であれば，定義により x^p, y^p に対応する基底行列は非特異かつ $c_{ij}{}^p$ はすべての i, j に対してある定数（X_0, Y_0 の端点に対応するすべての基底によって定まる定数）で押えられることになる。一方，$x^p\notin\mathrm{ext}\,X_0$ であれば，一般性を失うことなしに（x^p で等式によって満たされている追加制約式のうち１つを残して全部を一時的に無視することにより）x^p を退化していない端点であるとみなせるから，x^p に隣接する m 個の端点を通るカットが導入されることになり（図 2. 7），図 2. 6 のような現象は防止されることになる（但しこれだけでは $c_{ij}{}^p$ の一様有界性の証明としては十分でない）。また，g^p, h^p の選択規則は，単に１つの規準であるにすぎず，これらはいわばいかようにも選ぶことができるので，これらをランダムに選ぶことにより $\max\limits_{i,j} c_{ij}{}^p\to\infty$ となる現象を確率１で防止することもできよう。しかし，ここでは便宜上，すべての p に対して $\max\limits_{i,j} c_{ij}{}^p<M$ となる定数 M の存在を仮定したわけである。

（こんの　ひろし・技術経済研究部）

参　考　文　献

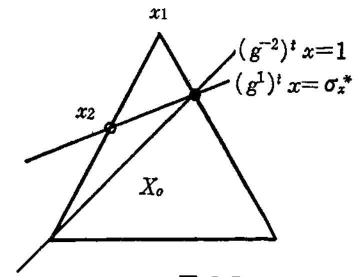

図 2. 7

1. Adler, I., "Abstract Polytopes", Ph. D Dissertation, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, (1971).
2. Altman, M., "*Bulletin d'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Math Astr et Phys* 19 (1968), 741～746.
3. Balinski, M. L., "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets" *J. Soc. Indust. Appl. Math* 9 (1961), 72～88.
4. Cabot, A. V., and R. L. Francis, "Solving Certain Nonconvex Minimization Problems by Ranking Extreme Points," *J. ORSA*, 18 (1970), 82～86.
5. Cottle, R. W., and G. B. Dantzig, "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming", *Linear Algebra and Its Applications* 1 (1968), 103～125.
6. Cottle, R. W., and G. B. Dantzig, "A Generalization of the Linear Complementarity Problem," Technical Report No. 68～9, Department of Operations Research, Stanford University Stanford, California, (1968).
7. Dantzig, G. B., "Solving Two-Move Games with Perfect Information," RAND Report P-1459, Santa Monica, California, (1958).
8. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1963).
9. Dantzig, G. B., "Reduction of a 0～1 Integer Program to a Bilinear Separable Program and to a Standard Complementarity Problem," Unpublished Note (July 27, 1971).
10. Eaves, B. C., "The Linear Complementarity Problem," *Management Science* 17 (1971), 612～635.
11. Eaves, B. C., "On Quadratic Programming,"

Management Science 17 (1971), 698～711.

12. Karamardian, S., "The Nonlinear Complementary Problem, Part I & II," *J. of Optimization Theory and Applications*, 4 (1969), 87～98, 167～181.
13. 今野 浩, "双線型計画法第1部：双線型計画アルゴリズム", 経済研究所研究リポート No. 3, 電力中央研究所, 1972.
14. 今野 浩, "双線型計画法第2部：双線型計画法の応用", 経済研究所研究リポート, No. 4, 電力中央研究所, 1972.
15. Kuhn, H. W., and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press; Berkeley, California, (1950), 481～492.
16. Lemke, C. E., "Recent Results on Complementarity Problems" in J. B. Rosen, O. L. Mangasarian and K. Ritter (eds), *Nonlinear Programming*, Academic Press, N. Y., 1970.
17. Lemke, C. E., and J. F. Howson, Jr., "Equilibrium Points of Bimatrix Games," *J, Soc, Indust, Appl, Math*, 2 (1964), 413～423.
18. Mylander, W. C., "Nonconvex Quadratic Programming by a Modification of Lemke's Method," RAC–TP 414, Ressarch Analysis Corporation, McLea, Vciginia, (1971),
19. Nash, J, F,, "Non Cooperative Games," *Ann, Math*, 54 (1951), 286～295.
20. Reiter, S., and D. B. Sherman, "Discrete Optimizing Solution Procedures for Lor Linear and Nonlinear Integer Programming Problems," *Management Science* 12 (1966), 829～850.
21. Ritter, K., "A Method for Solving Maximum Problems with a Nonconcave Quadratic Objective Function," *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verb. Geb.*, 4 (1966), 340～351.
22. Scarf., H., "An Algorithm for a Class of Non Convex Programming Problems," Cowles Commission Disussion Paper No. 211, Yale University New Haven, Conn., 1966.
23. Stoer, J., and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimension I*, Springer Verlag, N. Y., (1970).
24. 竹内 啓, 真鍋龍太郎, "2次計画 Quadratic Programming について", 経営科学 10 (1967), 117～139.
25. Tui, H., "Concave Programming under Linear Constraints," *Soviet Math*, (1964), 1436～1440.