研究ノート

技術代替を考慮した一般均衡の計算法

Computing Equilibrium in the General Leontief Model

キーワード: 一般レオンチェフ・モデル、一般均衡、産業連関分析、降下法

西　村　一　彦

本研究では、経済システムにおける各産業の技術代替の可能性を包含する一般レオンチェフ・モデルにおいて、均衡解を求める手法を提案する。この手法によれば、経済システムに新技術が導入されたり環境税などの制度的変化がもたらされた場合の構造変化を推定することが可能となり、特に技術評価のための新たな道具立てに貢献するものと考えられる。提案する手法は、技術的または制度的変化が導入された直後の経済システムの構造がホーキンズ・サイモン条件を満たす場合に適用できる。この場合に、一般レオンチェフ・モデルにおける各産業のコスト最小化行動による技術選択のくり返しという模索過程のシミュレーションが、均衡解をもたらすアルゴリズムとなることを示す。さらに、一般的な技術や制度の導入に関しても考察を行う。

1. はじめに

新技術導入の意思決定を行う場合には、導入後の帰結を吟味することが必要である。社会全体の産業において採用されている生産技術が相互に依存している（ある産業で生産される財が他の産業の生産要素である）ことを考慮すると、新技術導入は経済システムの構成要素の変更と捉えられ、社会全体の生産性や、環境負担性に影響を及ぼすと考えられる。

サミュエルソン(1951)による一般レオンチェフ・モデル[2] (General Leontief Model, GLM)における非代替定理は、様々な財の消費が社会全体の各産業の生産量や、環境負荷におよぼす影響を産業連関表を用いて定量的に明らかにすることを可能にしてきた[6]。その一方で、産業での採用技術そのものの変更（この場合、非代替定理は成立しない）に対するインパクトの評価手法は未だに確立していない。

例えば、電力産業で新たな発電技術を採用した場合、電力価格の変化をもたらすと考えられるが、これにより（例えば）製鉄産業は鉄の生産コストを最小化するために高炉よりも電気炉での生産を選択するかもしれない。さらにこのために鉄の価格も変化するということが繰り返され、同様の技術代替が経済システムの隅々にまで波及し、新たな構造をもたらすと考えられる。

同様の構造変化は環境税の導入などの制度的変更によってももたらされる。税導入などの帰結は、経済学における一般均衡の概念に基づいて研究されている。これらは主に、生産者と消費者が最適な生産技術や消費財を選択しあっている状態（一般均衡）を経済モデ

ルの中でシミュレートするものである。

これまで数多くの一般均衡モデル[4][8]が開発されてきた。しかし、これらは主に、労働、資本、素材、エネルギーなどの大まかな生産要素間の代替性を、計量経済学の手法を用いてモデル化し、均衡解を求めている。しかし、このような実際の一般均衡モデルにおける産業の行動モデルは、統計データの不備や均衡計算アルゴリズムの複雑さなどの理由から、特に代替技術選択に関して非常に限定されざるを得ない。

一方、産業連関分析の流れでは、経済システムの最適構造（即ち最適な産業連関表）を、線形計画法を用いて導出する試みがなされてきた[1]。理論的にはこの方法も、上述の一般均衡でもたらされる均衡技術と同値であることが示されている[10]。しかし、この方法では線形計画プログラムに盛り込める代替技術の数が限定されるため、制約された条件のもとでの最適構造しか分析することができない。

これに対し本稿では、各産業によるアドホックな技術選択手続きのくり返し（模索過程）が、GLM の均衡に収束することを示すことにより、均衡技術の推定が可能であることを示唆する。従って、提案する均衡技術導出のためのアルゴリズムは、事前に全ての代替技術に関する情報を必要としない。尚、この技術選択手続きは、任意の価格に対し各産業はコスト最小化となる技術を選択し、さらに各産業はコスト自身を価格とする（完全競争を仮定）、というものである。

以下の議論のために、産業や政府による技術的、制度的変化の導入を「アクション」と定義しておく。これを用いれば、本稿の目的は、アクション後の均衡技術及び価格の導出方法の開発となる。2 章では、一般レオンチェフモデルの概要を示し、このモデルにおける一般均衡解が、各産業の模索過程のシミュレーションを表すコスト関数の不動点となり、しかもそれ自身が均衡探索アルゴリズムとなることを示す。3 章では、このアルゴリズムを実行する際に必要な、産業のコスト最小技術選択の可能性を述べる。4 章では、アクション直後の技術構造がホーキンズ・サイモン[3]（H-S）条件を満たす場合に、均衡解が 2 章におけるアルゴリズムにより得られることを示す。5 章では、アクション直後の技術構造が H-S とならず、従って初期の経済システムが機能しない場合にも、上記のアルゴリズムが均衡解をもたらす初期値が存在することを述べる。また、生産関数がコブ・ダグラス型と仮定した場合には、このアルゴリズムが大域収束性を持つことを示し、併せて数値例も示す。

2.　一般レオンチェフモデル

経済システムの模型である GLM は次のような仮定により定義される。

1）各産業は唯一つの財を生産する。
2）根源的生産要素は、唯一つ（労働）である。
3）各産業は収穫一定の生産関数を持つ。
4）各産業は完全に競争的である。

今、産業の数 n の GLM を考え、各産業の生産関数が次のような一次同次の凹関数(C^1 級)に従うとする。

$$y_i = f_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{i,n+1}\right),$$

但し、y_i = 産業 i の生産量、x_{ij} = 産業 j から産業 i への投入量である。また、n+1 番めの産業は、財を消費し労働を供給する最終消費部門を表す。GLM の概要を図 1 に示す。

各財の物量収支から、

$$y_i = \sum_j x_{ij} + d_i,$$

但し、d_i = 産業 i における生産財の消費量である。非代替定理では、GLM における均衡技術（投入産出係数）$a_{ij} = x_{ij} / y_i$ が、d_i に無関係に一定

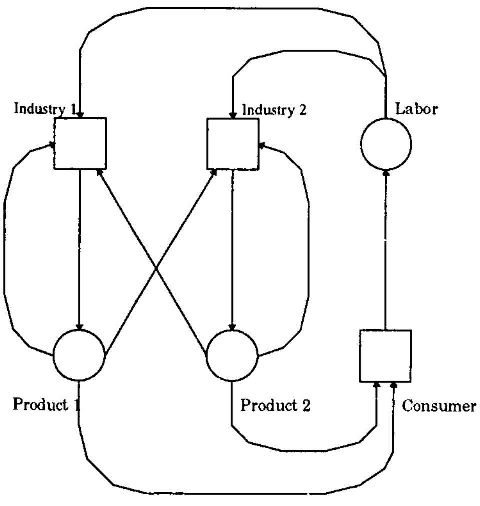

図1　一般レオンチェフモデル（2産業）

であることが示される。

しかし、いかなるアクションもこの均衡技術を変化させる可能性がある。産業 i でのコスト最小化行動は、任意の価格 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ に対し、

決定変数：$x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}, x_{i,n+1})$

最小化：$h_i y_i = p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} + \cdots + p_n x_{in} + x_{i,n+1}$

制約：$y_i = f_i(x_i)$,

という最適化問題に定式化される。但し、h_i= 産業 i の単位生産財の最小コスト（平均コスト）である。またここでは、賃金を1に基準化している。

生産関数が1次同次であることを考慮すると、上記の最適化問題は次の問題と同値である。同じく任意の価格 p に対し、

決定変数：$a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1})$

最小化：$h_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \cdots + p_n a_{in} + a_{i,n+1}$

制約：$1=f_i(a_i)$

収穫一定の生産関数を持つ GLM では、このように生産量に無関係に選択技術及びそのコストが決定される。この様子は図2に描写されている。価格 (p_1^*, p_1^*) に直面している産業 i はその代替技術の中から最小コスト技術 (a_{i1}^*, a_{i2}^*) を選択する。以下では、このような各産業におけるコスト最小化行動を、$h_i(p): R_+^n \to R_+^1$ というコスト関数で表すことにする。

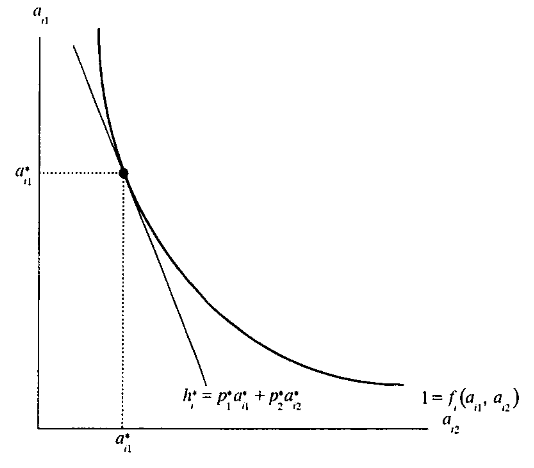

図2　コスト最小技術の選択

各産業が完全に競争的であることから、各産業において生産財に対して平均コストと同一の価格が設定される。従って、GLM における均衡価格は次のような連立方程式の解（即ち不動点）として得られることになる。

$$
\begin{aligned}
p_1 &= h_1(p_1, p_2, \ldots, p_n), \\
p_2 &= h_2(p_1, p_2, \ldots, p_n), \\
&\vdots \\
p_n &= h_n(p_1, p_2, \ldots, p_n),
\end{aligned}
$$

または単に、

$$p = h(p),\quad h:\ R_+^n \to R_+^n. \tag{1}$$

この関数 h は、$p \in P \subset R_+^n$ を P 自身に写す写像と捉えることができる。従って、h は(1)を解くためのアルゴリズムと見ることができる。

3.　効率的なコスト最小技術の選択

ここでは、コスト最小技術の効率的な選択の可能性について述べる。図3は、新たな価格 p^{**} に対して技術選択を行う産業 i を表している。この図から、この産業は採用技術を ABC に囲われた部分に属する代替技術に限定することができることが分かる。

例えば、特に電力価格が上昇した価格（ベク

トル）に対して製鉄産業は、その代替技術を、比較的電力を用いない技術に限定することができる。産業では実際、全ての代替技術のコストを試算してから採用技術を決定しているわけではない。これらより、各産業のエキスパートによるコスト最小技術の効率的選択が可能であると考えられる。

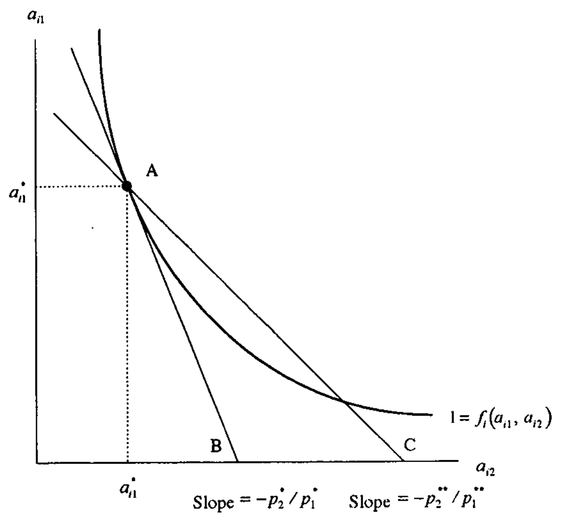

図3　代替技術の限定

4.　均衡探索アルゴリズム

ここでは、アクション直後の技術構造が H-S 条件を満たす場合、アルゴリズム h により価格 p が均衡価格に収束することを示す。但し、アクション直後の技術構造とはアクションの導入は含むが、それによる産業全体の選択技術はアクション以前のままである状態を指す。

4.1　アルゴリズムの収束性

技術構造の H-S 条件とは、いかなる需要も非負の生産によってまかなわれるという、実際の経済システムが、機能する上で持つべき基本的性質に他ならない。従って、少なくともアクション直後の技術構造に関して H-S 条件を仮定する（即ち初期技術構造が H-S 条件を侵さないようなアクションしか仮定しない）ことは、経済システムが適切な初期価格を与えることにより均衡を自律的に模索することを示す（またそれによって模索過程のシミュレーションによる均衡解の導出が可能であることを示す）場合には必要である。

本稿では、A 、a_{n+1} をもって経済システムの技術構造を表す。但し、これらは通常の産出投入係数の転置行列である。今、アクション直後の技術構造を $\hat{A}$ 、$\hat{a}_{n+1}$ と書くことにすると、各産業での金額収支（物量収支の双対式）は次のようになる。

$$p = \hat{A}p + \hat{a}_{n+1} \qquad (2)$$

これを満たす価格を、初期価格とする。

$$p^{o} = \left[I - \hat{A}\right]^{-1}\hat{a}_{n+1}$$

アクション直後の技術構造は各産業によって最適技術の選択が行われていない状態であるが、各産業が初期価格に対して最適技術を選択した場合、初期価格よりもコストが大きくなることはない。従って、次のことが言える。

$$h(p^{o}) \le p^{o} \qquad (3)$$

次に、このアクション直後の初期価格が均衡価格 $\overline{p}$ よりも小さくないことを示す。任意の価格に対する最適技術による価格（＝コスト）は、それ以外の技術による価格に比べ大きくない。

$$h(p) \le \hat{A}p + \hat{a}_{n+1}$$

これは $\overline{p}$ 及び p^{o} についても言えるが、(2)及び(3)を考慮すると、

$$\left[I - \hat{A}\right]\overline{p} - \hat{a}_{n+1} \le 0\,,$$
$$\left[I - \hat{A}\right]p^{o} - \hat{a}_{n+1} = 0$$

を得る。従って、

$$\left[I - \hat{A}\right]\left(p^{o} - \overline{p}\right) \ge 0$$

を得るが、$[I - \hat{A}]$ が H-S であることから、

$$\bar{p} \leq p^o$$

を得る。

$x \leq y$ なる生産要素価格に対し、$h(x) \leq h(y)$ であるというコスト関数の性質から、

$$\bar{p} = h(\bar{p}) \leq h(p^o) \leq p^o$$

を得るが、これをくり返し用いることにより、

$$\bar{p} \leq \cdots \leq h^{k+1}(p^o) \leq h^k(p^o) \leq h^{k-1}(p^o) \leq \cdots \leq p^o \quad (4)$$

を得る。但し、$h^k(p^o)$ は、初期価格 p^o から始まる k 番目の価格のシーケンス p^k を表す。

従って、全ての p^k は有界閉区間 $[\bar{p}, p^o]$（コンパクト集合）のなかに存在する。更に、h は $\forall p \in P$ に関して閉じていることから、アルゴリズム h の収束性が示される。アルゴリズム h は $P \subset R_+^n$ 上で定義され、ある初期価格 p^o から $p^{k+1} = h(p^k)$ を満たしながら数列 $\{p^k\}_{k=o}^{\infty}$ が生成される。数列の各要素はコンパクト集合に含まれ且つ、(4)より h は次のような性質を持つ。

$$h(p) < p \qquad \text{for } p \neq \bar{p},$$
$$h(p) = p \qquad \text{for } p = \bar{p}.$$

以上より、h は降下アルゴリズムの性質[5][13]を持ち、p^k は p^o から始めることにより $\bar{p}$（均衡価格）に収束することが示された。

4.2 均衡技術の性質

シェファードの補題[11]より、コスト関数を用いて価格に対する最適採用技術を表すことができる。

$$\frac{\partial h_i(p)}{\partial p_j} = a_{ij}(p), \quad i = 1, \cdots, n\,; j = 1, \cdots, n+1$$

従って、∇（グラジアン）を用いれば、任意の価格 p に対する最適技術構造を $\nabla h(p)$ と表すことができる。これを用いてコスト関数を表すと、

$$h(p) = \nabla h(p)p + a_{n+1}(p) \quad (5)$$

となる。但し、$a_{n+1}(p): R_+^n \to R_+^1$ は最適労働投入係数を表す。これは上述の価格列 p^k に関しても成立することも踏まえ、(5)をさらに変形すると、

$$h(p^k) - \nabla h(p^k)p^k = a_{n+1}(p^k) \geq 0$$

従って、

$$p^k - h(p^k) \leq [I - \nabla h(p^k)]p^k$$

を得る。一方、(3)によれば、p^o を初期価格とする場合、この式の左辺は非負となる。

$$[I - \nabla h(p^k)]p^k \geq 0$$

価格列は $p^k \geq 0$ であるが、これを満たすためには $[I - \nabla h(p^k)]$ が H-S であることが必要となる[9]。結局、前出の価格列に対する技術構造は全て H-S であることになり、均衡技術構造もまた H-S となる。

4.3 均衡の唯一性

生産の理論から、生産関数が凹関数である場合、コスト関数も凹関数となる[11]。

$$h_i(p) \leq h_i(\bar{p}) + \nabla h_i(\bar{p})(p - \bar{p}), \quad \forall \bar{p} \in P$$

$\bar{p}$ が均衡価格であるとすると、$h_i(\bar{p}) = \bar{p}$ を考慮し、行列を用いて次の式を得る。

$$p - h(p) \geq [I - \nabla h(\bar{p})](p - \bar{p}) \quad (6)$$

今、もう一つの均衡価格 p' が存在したとする。この場合も上記と同様に、

$$p - h(p) \geq [I - \nabla h(p')](p - p') \quad (7)$$

を得るが、(6)、(7)はいかなる価格 $p \in P$ に関しても成立するので、次の式が同時に成立する。

$$[I - \nabla h(\bar{p})](\bar{p} - p') \geq 0$$
$$[I - \nabla h(p')](p' - \bar{p}) \geq 0$$

一方、技術構造 $\nabla h(\bar{p})$、$\nabla h(p')$、何れも H-S であるため、結局次の式が同時に成立することに

なる。

$$(\bar{p}-p')\geq 0$$
$$(p'-\bar{p})\geq 0$$

従って、$\bar{p}=p'$ であり、H-S 均衡の唯一性が示された。

5. 初期技術構造が H-S でない場合

アクション直後の技術構造が H-S とならない場合でも、何らかの方法で H-S である均衡技術構造を得ることができれば、あらゆるアクションの導入評価が可能となる。

5.1 収束する初期値の存在

前章の(6)は、$p-h(p)\geq 0$ となる p が存在することを示している。これは $[I-\nabla h(\bar{p})]$ が H-S であることから、

$$[I-\nabla h(\bar{p})](p-\bar{p})\geq 0$$

となる $p-\bar{p}\geq 0$ が存在するためである。従って、もしこのような p を見つけることができれば、初期の技術構造に無関係に、h は降下アルゴリズムとなり、均衡に収束する。

5.2 コブ・ダグラス型生産関数の場合

生産関数がコブ・ダグラス型であると仮定できる場合には、このアルゴリズムは初期価格やアクション後の技術構造に関りなく大域的に収束し、均衡解をもたらすことを示す。

各産業は次のようなコブ・ダグラス型一次同次生産関数に従うとする。

$$y_i=\prod_{j=1}^{n+1}x_{ij}^{\beta_{ij}},\ \sum_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}=1,\ i=1,\cdots,n$$

これより完全競争下のコスト関数は、次のようになる。

$$h_i(p)=\left(\prod_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}^{-\beta_{ij}}\right)\prod_{j=1}^{n}p_i^{\beta_{ij}},\quad i=1,\cdots,n$$
$$\equiv c_i\prod_{j=1}^{n}p_i^{\beta_{ij}}$$

$\log c_i\geq 0$ なる底の対数をとれば、

$$\log h_i=\log c_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\log p_i$$

もしくは行列を用いて、

$$\eta=\chi+B\pi \tag{8}$$

と書ける。但し $\eta=[\log h_i]$、$\chi=[\log c_i]\geq 0$、$B=[\beta_{ij}]$、$\pi=[\log p_i]$、である。また、方程式

$$\pi=\chi+B\pi \tag{9}$$

において、

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}<1$$

であることから、ソローの行和条件[12]が成立し、(9)は非負可解となる。従って、$\pi-B\pi>0$ をみたす $\pi>0$ が存在し、このことから

$$\lim_{k\to\infty}B^k=0 \tag{10}$$

が示される[9]。

一方、均衡価格は $\pi=\eta(\pi)$, $\eta: R^n\to R^n$ の解として求められる。従って、上述のアルゴリズム即ち、

$$\pi^{(k+1)}=\eta\left(\pi^{(k)}\right) \tag{11}$$

により生成される点列が、均衡解に収束することを示せばよい。(9)より均衡解は、

$$\bar{\pi}=[I-B]^{-1}\chi \tag{12}$$

であるが、(11)を(8)を用いて展開すると、

$$\pi^{(k)}=\chi+B\chi+B^2\chi+\cdots+B^{k-1}\chi+B^k\pi^{(o)}$$

であるから、(10)を考慮すれば

$$\lim_{k\to\infty}\pi^{(k)}=[I+B+B^2+\cdots]\chi=[I-B]^{-1}\chi$$

となり、(12)の均衡解と同値であることが示される。ここで特筆すべきことは、初期値$\pi^{(o)}$に無関係に、このアルゴリズムが収束し均衡解をもたらすということである。

5.3 数値実験

次に、コブ・ダグラス型生産関数におけるアルゴリズムの収束性を、$n=2$の場合の数値実験で確認する。図4は次のような場合（実験1）の均衡価格への収束の様子を示す。

— 実験1 —

生産関数

$$y_1 = x_{11}^{0.9} x_{12}^{0.04} x_{13}^{0.06}$$

$$y_2 = x_{21}^{0.01} x_{22}^{0.9} x_{23}^{0.009}$$

初期価格

$$p^{o} = (450,\ 1)$$

均衡価格

$$\bar{p} = (264,\ 62.4)$$

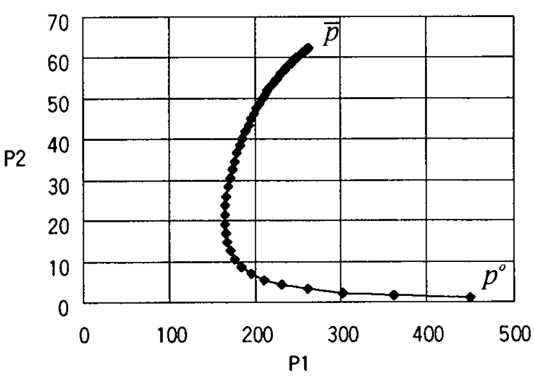

図4 均衡価格探索過程（実験1）

図5には、図4のの均衡探索過程における価格と均衡価格とのユークリッドノルム（距離）を示す。実験1の場合、初期価格p^{o}に対する技術構造は、H-Sとならない。しかし、図5に示されているように、探索過程の15ステップ以降の技術構造はH-Sとなった。

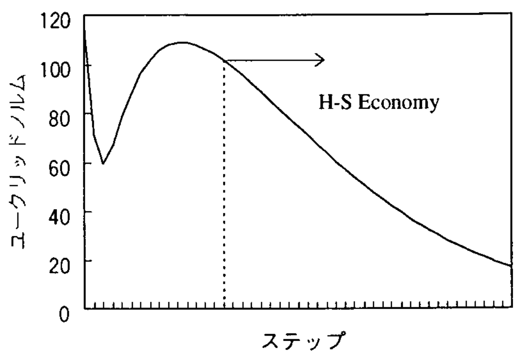

図5 ノルムの変化（実験1）

同様に、次の場合（実験2）の、価格の収束の様子と、ノルムの変化を図6及び図7に示す。

— 実験2 —

生産関数

$$y_1 = x_{11}^{0.01} x_{12}^{0.88} x_{13}^{0.11}$$

$$y_2 = x_{21}^{0.9} x_{22}^{0.02} x_{23}^{0.08}$$

初期価格

$$p^{o} = (0.0001,\ 50)$$

均衡価格

$$\bar{p} = (58.0,\ 61.0)$$

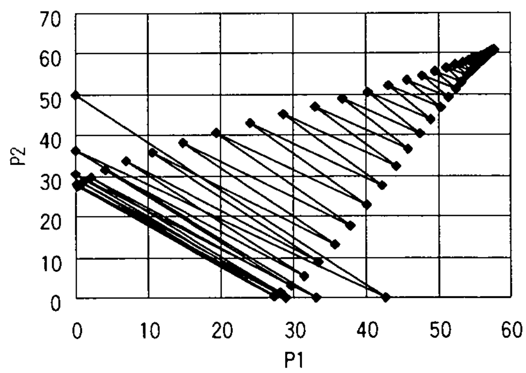

図6 均衡価格探索過程（実験2）

実験2も、初期価格に対する技術構造はH-S条件を満たさないが、この場合は21ステップ以降の技術構造がH-Sとなった。図5、7より明らかなように、必ずしも探索過程の各ステップでノルムが単調減少しないため、通常のノルムの降下関数を見つけることで収束性を示すことは困難である。尚、4章で示したように、H-S構造以降のノルムは単調減少しているのがわかる。

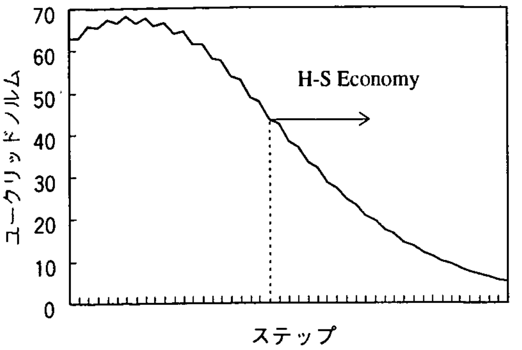

図7　ノルムの変化（実験2）

6　おわりに

本研究では、新技術および制度の導入にあたり次の事項を得た。1)アクション直後の技術構造がH-Sの場合に、均衡技術を求めるための初期値及びアルゴリズムを求めた。2)アクション直後にH-Sでない一般の場合でも、このアルゴリズムが均衡に収束する初期値が存在することを示した。3)生産関数がコブ・ダグラス型である場合には、大域的に収束することを示した。4)数値実験により以上のことを確認した。

この結果を応用し、今後、各分野のエキスパートによる技術選択シミュレーションを用いた、新技術及び環境税の導入評価が可能になると考えられる。

【参考文献】

[1] Duchin, F., and Lange, G., (1995) "The choice of technology and associated changes in prices in the U.S. economy," Structural Change and Economic Dynamics, 6, 335-357.

[2] Gale, D., (1960), The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill.

[3] Hawkins, D., and Simon, H. A., (1948) "Note: Some conditions of macro-economic stability," Econometrica, 16, October.

4] Jorgenson, D. W., and Wilcoxen, P. J. (1993), "Reducing US carbon dioxide emissions: The cost of alternative instruments," Journal of Policy Modeling 15, March.

[5] Luenberger, D. G., (1984), Linear and nonlinear programming, Addison-Wesley.

[6] Nishimura, K., Hondo, H., and Uchiyama, Y., (1996), "Derivation of energy embodiment functions to estimate the embodied energy from the material content," Energy, 21/12, 1247-1256.

[7] Samuelson, P. A., (1951), "Abstract of a theorem concerning substitutability in open Leontief models," in T. C. Koopmans (Ed.), Activity analysis of production and allocation, Yale University Press.

[8] Shoven, J. B., and Walley, J. (1973), "A general equilibrium with taxes: A computational procedure on an existence proof," Review of Economic Studies 40, 475-489.

[9] Takayama, (1985), A., Mathematical economics, Cambridge University Press.

[10] Weyant, J. P., (1985) "General economic equilibrium as a unifying concept in energy-economic modeling," Management Science 31/5, 548-563.

[11] 奥野正寛、鈴村興太郎 (1988),「ミクロ経済学Ⅰ・Ⅱ」、岩波書店。

[12] 小山昭雄 (1995),「経済数学教室 1～8」、岩波書店。

[13] 今野浩、山下浩 (1978),「非線形計画法」、日科技連。

（にしむら　かずひこ
電力中央研究所　経済社会研究所）